Naam: Adres: Postcode en Woonplaats:	Studentnummer: Studierichting: Wiskunde Jaar van eerste inschrijving: '9?5	Bladnr.: I Tentamen: Functietheorie 1 Datum: 20-03-'97 Naam docent: E. Thomas

I

Opgave 1

$\alpha \in \mathbb{C}$ dan $\alpha = x+iy$ en gegeven: $Re(\alpha) = x > 0$

Dan $\frac{1}{\alpha} = \cancel{\frac{1}{x+iy}} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

en dus $Re(\frac{1}{\alpha}) = \frac{x}{x^2+y^2}$

Omdat $x>0$ geldt $x^2+y^2 > 0$ (dus niet $x^2+y^2=0$)

en dus $\frac{x}{x^2+y^2} > 0$. dus $Re(\frac{1}{\alpha}) > 0$. $\boxtimes$ ✓

9,8

Opgave 2.

$P(z) = c(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$

gegeven $Re(\alpha_i) < 0 \ \forall i \ 1 \le i \le n$.

$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(z-\alpha_k)}$

Nulpunten van $P'(z)$ die niet nulpunt van $P(z)$ zijn. zijn eveneens nulpunten van

$\frac{P'(z)}{P(z)}$ ~~[illegible]~~ Nulp. van $P'(z)$ die ook nulptn van P zijn hebben Re<0

Als nu $Re(z) \geq 0$ dan $Re(z-\alpha_k) = \underbrace{Re(z)}_{\geq 0} - \underbrace{Re(\alpha_k)}_{<0}$ ✓

dus $Re(z-\alpha_k) > 0$.

En wegens 1) dan ook $Re\left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right) > 0$

en dus ook $Re \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z-\alpha_k}\right) > 0$.

Dus als $Re(z) \geq 0$ dan wordt $\frac{P'(z)}{P(z)}$ niet nul

en dus $P'(z)$ ook niet. → Nulpunten van $P'(z)$ hebben $Re(z) < 0$. $\boxtimes$ ✓

Prima werk

II

Opgave 1

~~Zij Ω een domein~~ Ω e.v.s. enkelvoudig samenhangend

Zij $f(z)$ een meromorfe functie met sing ptn α_j

$f : \Omega \to \mathbb{C}$. Zij vervolgens C een gesloten contour binnen Ω, met de eigenschap dat er geen singuliere ptn. van f op C liggen en dus een eindig aantal sing ptn binnen C

Dan geldt:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j Res(f, \alpha_j)$$ waarbij

gesommeerd wordt over die j's waarvoor α_j binnen C ligt.

Opgave 2. a) $f(z) = \tan(\pi z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$.

Singuliere punten zijn $z = \frac{1}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Deze ~~pa~~ singulariteiten zijn polen van orde 1. ⊛

Dus $\text{Res}(f, \alpha) = \dfrac{\sin(\pi z)}{\frac{d}{dz}\cos(\pi z)}\Big|_{z\to\alpha}$

$$= -\frac{\sin \pi z}{\pi \sin \pi z}\Big|_{z\to\alpha} = -\frac{1}{\pi}\Big|_{z\to\alpha} = -\frac{1}{\pi} \quad \checkmark$$

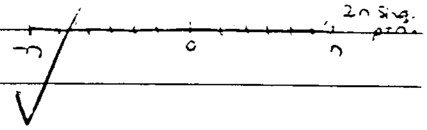
⊛ immers $\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}k} (z - \tfrac{1}{2}k)\cdot\dfrac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)} =$

$$= \lim_{z\to\frac{1}{2}k} \frac{\sin \pi z + \pi z \cos \pi z - \frac{1}{2}k\pi \cos \pi z}{-\pi \sin \pi z} = -\frac{1}{\pi}$$ dus polen van orde 1.

b. Γ_n is cirkel $|z| = n$.

$$\int_{\Gamma_n} \tan(\pi z)\,dz = 2\pi i \sum \text{Res}(f, \alpha_j)$$

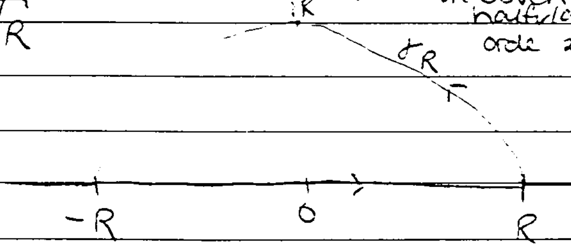
$$= 2\pi i \cdot -\frac{1}{\pi}\cdot 2n = -4ni \quad \checkmark$$



Opgave 3 $\quad J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \qquad f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$

Hiervoor bekijk ik: $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\,dz$ met enige pool $z = i$ in bovenhalfvlak orde 2.

γ_R is de halve cirkelboog.



Dan geldt

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz.$$

en $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}(f, \alpha_j) = 2\pi i\,(\text{Res}(f, z=i))$ voor $R > 1$.

$$\text{Res}\left(f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2},\ z = i\right) = \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right)\Big|_{z\to i}$$

$$= \frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+i)^2}\Big|_{z\to i} = \frac{2z(z+i)^2 - z^2\cdot(2z+2i)}{(z+i)^4}\Big|_{z\to i} = \frac{-i}{4}.$$

Dus de gevraagde integraal is dus (met $\lim R\to\infty$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz - \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = -2\pi i\cdot\frac{i}{4} - \int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{i2\theta}}{(1+R^2 e^{i2\theta})^2}\, iRe^{i\theta}$$

met $z = Re^{i\theta}$ $\quad 0 \le \theta \le \pi$

voor de laatste integraal geldt: (zie volgende blad)

Naam: Adres: Postcode en Woonplaats:	Studentnummer: Studierichting: Jaar van eerste inschrijving:	Bladnr.: III Tentamen: Functietheorie I Datum: 20-03-'97. Naam docent: Thomas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} \cdot x^{1-\alpha} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ is unif. convergent met $\alpha > 1$.

Dus $\zeta(t)$ is ook uniform convergent

2. $\zeta(z)$ = holomorf in halfvlak met $Re(z) > 1$.

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{z}}$$

dan $\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{n}\right)^z = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^z$

en deze reeks is convergent omdat

$$\int_0^1 |t^{\beta} \cdot \log t|\, dt < \infty \quad \text{voor alle } \beta > 0$$

en omdat $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^z \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \log\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \right|$

$$\leq \int_0^1 |\log t \cdot t^{\beta}|\, dt.$$

Dus de reeks van de afgeleide van $\zeta(z)$ is ook ~~[illegible]~~ convergent $\rightarrow$ dus $\zeta'(z)$ bestaat in een ϵ-omgeving van ieder $z \in \mathbb{C}$ met $Re(z) > 1$.
Dus $\zeta(z)$ is holomorf voor $Re(z) > 1$.

- EINDE -

O.K. Maar bij holomorfe functies is het nog eenvoudiger. Iedere reeks, uniform convergent op compacta, kan termsgewijs worden gedifferen-

Neem nu $g(z) = f(z+a) - f(a) = z \cdot F(z)$.
Dan $F(z) = \frac{1}{z} \cdot g(z)$. voor $z \in D_0(0,r)$ $D(0,r)$
Voor $g(z)$ geldt dat $|g(z)| \leq R$ op ~~de rand van $D(a,r)$~~

Dan geldt voor $|F(z)| = |\frac{1}{z}| \cdot |g(z)| \leq \frac{R}{|z|}$ ~~op de rand~~ op $D_0(0,r)$.

Dus, vanwege het maximum modulus principe, geldt dan $|F(z)| \leq \frac{R}{r}$ op de rand van $D_0(0,r)$ en dus op de hele $D_0(0,r)$.

Maar dan geldt voor $|g(z)| = |z| \cdot |F(z)| \leq \frac{R}{r} |z|$
en $|g(z)| = |f(a+z) - f(a)|$

Dus nu bewezen: $|f(a+z) - f(a)| \leq \frac{R}{r} |z|$. $\forall z : |z| < r$ ☒

Opgave 2) Liouville zegt: Als $|f(z)|$ begrensd op de hele $\mathbb{C}$ dan $f(z) \equiv c^{st}$. (f holomorf)
Neem voor $a = 0$ in bovenstaande stelling in 7).
Dan
$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{R}{r} |z| \quad \forall z : |z| < r.$$

Als nu $f(z)$ begrensd dan geldt
$$\cancel{|f(z)| - |f(0)|} \; |f(z) - f(0)| \leq \frac{R}{r} |z| \quad \forall z : |z| < r$$

Hier in mag r willekeurig groot worden omdat f een gehele functie is. Dus er geldt:
voor willekeurige $\varepsilon > 0$ en z $\exists r$ z.d.d.
$$\cancel{|f(z)| - |f(0)|} \; |f(z) - f(0)| \leq \frac{R}{r} |z| < \varepsilon$$
dus $|f(z) - f(0)|$ is willekeurig klein te maken
$\Rightarrow$ $f(z) = f(0)$. Ofwel $f \equiv f(0) = c^{st}$. ☒

V

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

1. $\forall \alpha > 1$ reeks un. conv. voor $Re(z) > \alpha$. $z = x + iy$
~~Er~~ geldt $\left|\frac{1}{n^z}\right| = \left|\frac{1}{n^{x+iy}}\right| = \left|\frac{1}{n^x} \cdot \frac{1}{n^{iy}}\right| \leq \left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$.

dus $|\zeta(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^z}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ met $\alpha > 1$.
$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ conv.

~~en deze laatste reeks is unif. convergent. Dus $\zeta(z)$ is uniform convergent voor $Re(z) > \alpha$.~~

zie volgende p.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: II
Adres:	Studierichting:	Tentamen: Functietheorie I
Postcode en Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Datum: 20 maart '97
		Naam docent: E. Thomas

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \int_0^\pi \left|\frac{R^2 e^{i2\theta}}{(1+R^2e^{i2\theta})^2} i R e^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\leq \int_0^\pi \left|\frac{R^2 e^{i2\theta}}{(1+R^2e^{i2\theta})^2} R\right| d\theta$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{R^4}\, d\theta \leq \frac{\pi}{R}.$$

en dus $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ zodat $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_{\Gamma_R} f(z)dz$

Dus $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{1}{2}\pi.$ ⊠

III

$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \dots$

$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \dots$

en $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots$

dus $\sin z = \frac{e^{+iz} - e^{-iz}}{2i}$ en $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2e^0}{-4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2e^0}{4}$$

$$= \frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{2}e^0 = e^0 = 1 + 0 + 0^2 + \dots = 1$$

Dus $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z.$ ⊠

IV

Opgave I

$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$

$f: D(a,r) \to D(f(a), R)$ holomorf.

$|f(z+a) - f(a)| \leq \frac{R}{r}|z| \quad \forall z : |z| < r.$

Omdat $f: D(a,r) \to D(f(a),R)$ geldt klaarblijkelijk dat $|f(z) - f(a)| \leq R$ voor $z \in D(a,r)$.

Er geldt (in de Taylorontw. van f) rond a:

$f(z+a) = f(a) + z \cdot F(z)$ met $F(z)$ holomorf op $D(0,r)$.